Physica didactica 4, 197 (1977)

Ebbe und Flut im Unterricht der Sekundarstufe I und II

H. J. Schlichting und P. Farwig

Daß Ebbe und Fluth sey, ist eine ausgemachte Sache, und der Augenschein zeiget es hier und dar, ohnerachtet sich die Naturkündiger wegen der Ursach, und wie es zugehe, nicht vergleichen können, wird auch wohl unausgemacht bleiben [1].

Zusammenfassung:

Die Gezeiten sind zu jenen, der unmittelbaren Erfahrungswelt der Schüler entstammenden Naturphänomenen zu zählen, die im Unterricht unserer Schulen nach Wagenschein zu Unrecht entweder überhaupt nicht oder nur unzureichend behandelt werden. Um dieses Defizit beseitigen. zu helfen, wurden die Gezeiten in der vorliegenden Arbeit als elementare Anwendung der Newton'schen Gravitationstheorie dargestellt. Den schulstufenspezifischen Ansprüchen entsprechend wurde zunächst eine qualitative bzw. halbquantitative Erklärung der wesentlichen Grundgedanken von Ebbe und Flut skizziert, um dann darauf aufbauend quantitativ vertieft zu werden.

Abstract:

The tides are natural phenomena which belong to the domain of direct experience of students. Nevertheless in School and College curricula they are totally neglected or treated only superficially. In order to change this situation the present paper describes the tides as an elementary application of Newton's theory of gravitation. Taking into account the different levels of students understanding, we present a qualitative explanation in which the main features of the tides are sketched as well as a quantitative treatment appropriate to the ‚"Sekundarstufe II" -level.

1. Einleitung

Dem Verfasser der obigen Zeilen war offensichtlich das Grundproblem jeder empirischen Wissenschaft klar, einerseits Phänomene möglichst exakt zu beobachten und zu beschreiben, andererseits eine Erklärung, eine theoretische Deutung zu geben. So finden sich unter dem Stichwort ,,Ebbe und Fluth" nicht weniger als 14 verschiedene Theorien zur Deutung des Phänomens, darunter als 5. die Galileische und als 10. die Newtonsche. Die letzte wird, 100 Jahre nach ihrer Entstehung, gleichrangig mit den anderen zitiert, obwohl Newton im Rahmen der klassischen Mechanik das Phänomen abschließend geklärt hat. Diese Tatsache und vor allem die theoretische Deutung selbst scheinen aber zunehmend in Vergessenheit zu geraten.

Dabei gehören die Gezeiten zu jenen eindrucksvollen, der unmittelbaren Erfahrung vieler Menschen zugängigen Phänomenen, die das kopernikanische Weltbild untermauern. Das kopernikanische System wird aber nach Wagenschein ,,bis heute in den Schulen mit einer solchen Oberflächlichkeit erledigt daß kaum ein Abiturient zu sagen weiß, warum er eigentlich Kopernikaner zu sein glaubt" [2].

Diese These läßt sich für die Gezeiten anhand der gängigen Lehrbücher belegen. In den wenigen Fällen, in denen das Problem der Gezeiten überhaupt thematisiert wird, geschieht das in einer sehr voraussetzungsvollen Weise die unseres Erachtens die wesentlichen Gesichtspunkte des Phänomens nicht zum Ausdruck bringt [3]. Darüber hinaus zeigt eine Befragung von Physiklehrerstudenten, daß die Gezeiten als physikalisches Problem weitgehend unbekannt geblieben sind [4]. Die wenigen Ausnahmen bestätigen nach unserer Auffassung diese Regel.

Die Gründe dafür dürften im wesentlichen darin zu sehen sein, dass Naturphänomenen im Schulunterricht zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt wird. Da sich Naturphänomene auf Gegebenheiten der realen Außenwelt beziehen, müssen die dem jeweiligen Phänomen zugrunde liegenden Naturgesetze in einem mehr oder weniger komplexen Kontext erarbeitet werden. Das erfordert zwar Zeit, fördert aber auch die Fähigkeit der Lernenden ,,zwischen der unmittelbar gegebenen (an anschauliche Phänomene gebundenen, d. V.) und der mittelbar erschlossenen (weitgehend fiktiven, d. V.) Welt" unterscheiden zu lernen, was nach Wagenschein als ,,ein wesentliches Element der Wissenschafts-Verständigkeit" [5] angesehen werden muß. Diese Fähigkeit ist aber nur dadurch zu erwerben, daß die kontinuierliche Verbindung bewußt bleibt ,,die durch immer künstlichere Vermittler von der primären zur sekundären Welt hinführt" [6].

Auf dem Hintergrund dieser Argumentation soll die vorliegende Arbeit Beiträge zu folgenden Punkten leisten: Erstens soll durch eine gründliche Sachanalyse des Problems der Gezeiten eine Voraussetzung für Wissenschaftsverständigkeit im Sinne Wagenscheins geschaffen werden.

Wenn wir in der Analyse das Phänomen zuweilen ausführlicher und tiefer untersuchen, als es für eine Unterrichtseinheit erforderlich wäre, so tun wir das im Bewußtsein der Tatsache, daß ein ,,Verständnis der Physik von einem höheren Standpunkt aus“ [7] als Voraussetzung dafür anzusehen ist, daß Lehrstoffe ohne Verfälschungen vom Fachlehrer elementarisiert werden können.

Zweitens soll an eine Anwendung der Gravitationstheorie Newtons erinnert werden, die unseres Erachtens stärker an Umwelterfahrungen anknüpft als die übliche Behandlung von Satelliten, Planeten und Kometen. Wer ist denn schon in der Lage, die Argumentation nachzuvollziehen, die aus der Beobachtung der Planetenbewegungen zum ersten Kepplerschen Gesetz führt? Wer ist denn in der Lage, solche Beobachtungen auch nur auszuführen? Woher soll die Motivation eines Lernenden im naturwissenschaftlichen Unterricht kommen, Phänomene zu begreifen, die er überhaupt nicht erlebt?

Drittens soll durch eine konsequente Benutzung und Erläuterung von Begriffen wie Schwerelosigkeit, Trägheitskräfte und ihr Zusammenhang mit der Verwendung beschleunigter Bezugssysteme sowie dem Äquivalenzprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie gezeigt werden, daß es sich dabei nicht - wie die übliche ,,anwendungsfreie" Diskussion relativistischer Prinzipien vielfach nahelegen mag - um esoterische, mit Phänomenen der Alltagserfahrung nicht zusammenhängende Prinzipien handelt, sondern daß im Gegenteil eben die Phänomene des Alltags (wie hier die Gezeiten) durch die Verwendung grundlegender und allgemeiner Prinzipien einer besonders einfachen und deutlichen Erklärung zugänglich gemacht werden können.

Viertens wollen wir, der These Bruners folgend, ,,daß jeder Unterrichtsgegenstand erfolgreich und in intellektuell vertretbarer Weise jedem Kind auf jeder Entwicklungsstufe gelehrt werden könne“ [8], das Phänomen der Gezeiten auf unterschiedlichen Elementarisierungsstufen behandeln.

2. Beschreibung des Phänomens der Gezeiten und qualitative Deutungen

Unter Gezeiten versteht man das zweimal pro Tag an den Küsten deutlich zu beobachtende Ansteigen (Flut) des Meerwassers bis zu einem höchsten Stand (Hochwasser) und das anschließende Fallen des Wassers (Ebbe) bis zu einem niedrigsten Stand (Niedrigwasser). Verbunden hiermit sind häufig sehr starke periodische Gezeitenströmungen, die für die Küstenschiffahrt, vor allem für Segelschiffe, bedeutsamer sein können als die Änderung des Wasserstandes an sich. Das Phänomen der Gezeitenströmungen ist weitgehend unbekannt. Die zeitliche Abfolge von Ebbe und Flut ist durch die Zeit eines halben ,,Mondtages“ bestimmt. Der ,,Mondtag" unterscheidet sich von dem durch die Erdumdrehung definierten Tag dadurch, daß der Mond der Erdumdrehung vorauseilt, und zwar in 28 Tagen um eine volle Umdrehung. Daher beträgt die Verspätung der nächsten Mondkulmination gegen die vorhergehende 24/28 Std. = ca. 50 Min. Die Periode der Gezeiten (Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Hochwassern bzw. Niedrigwassern) beträgt daher 12 Stunden und 25 Minuten. Je nach der Beschaffenheit der Küste und des Meeresbodens beobachtet man unterschiedliche zeitliche Abweichungen von dieser Periode sowie unterschiedliche Höhendifferenzen zwischen Hoch- und Niedrigwasser. An trichterförmigen Flußmündungen treten Tidenhübe bis zu 14 m (Fundybay) durch Aufstauen des Wassers auf, während im weitgehend ungestörten Ozean ein mittlerer Tidenhub von etwa 60 cm registriert wird.

Darüber hinaus zeigt der Tidenhub einen monatlichen Gang so, daß er bei Voll- und Neumond maximal ist (Springtide) und zweimal im Monat, jeweils bei Halbmond, ein Minimum annimmt. Schließlich zeigt sich ein jahreszeitlicher Gang so, daß die Springtiden um die Zeit der Frühjahrs- und Herbst-Äquinoktien besonders hoch ausfallen. Diese Erscheinungen gehören ebenso wie die Gezeitenströmungen nicht zum Erfahrungsbereich des Binnenländers, lassen sich aber aus den Gezeitenkalendern immerhin ablesen.

Ein klassisches Beispiel einer Beschreibung des Gezeitenphänomens sowie dessen überwältigender Eindruck auf Menschen, die weder mit ihm vertraut sind noch eine vernünftige Erklärung besitzen, findet man bei Kurtius Rufus (,,Von den Taten Alexanders des Großen“), zitiert in Ernst Mach [9].

Die Newton'sche Erklärung der Gezeiten auf der Grundlage seines universellen Gravitationsgesetzes und seiner Prinzipien der Mechanik ist wissenschaftshistorisch eines von vielen Erklärungsmodellen. Auch heute noch scheinen Relikte des einen oder anderen dieser Modelle im Alltagsbewußtsein vorhanden zu sein. Dagegen gehört Newtons Theorie in ihrem Grundgedanken und den Einzelheiten offensichtlich nicht mehr zum Allgemeingut der Physiklehrer.

Läßt man einmal die animistischen und finalistischen Konzepte beiseite obwohl sie vermutlich am weitesten verbreitet waren, so bleiben zwei zueinander disjunkte Klassen quasiwissenschaftlicher Modelle: Zum einen sah man wegen der Übereinstimmung der Flutperiode mit der Mondperiode, durch die Verstärkung der Flut bei Voll- und

Neumond, durch die tägliche Flutverspätung (um 50 Minuten) entsprechend der Verspätung der Mondkulmination usw. einen Zusammenhang zwischen Mondbewegung und Gezeiten. Daraus resultierte beispielsweise eine Theorie (die zur Zeit Newtons verbreitet war), in der der Mond bei seiner Bewegung um die Erde mit einer Art Luftdruckwelle die Flutwelle erregte.

Zum anderen ist es erstaunlich, daß einer der Begründer der exakten Naturwissenschaften, Galilei, die Ansicht von einer Anziehung des Mondes bei der Erklärung der Gezeiten als ,,mystisch und kindisch“ betrachtet hat [10]. Er glaubt vielmehr, die Gezeiten durch eine Relativbewegung der festen und flüssigen Erdteile erklären zu können: Durch die gleichzeitige Progressivbewegung der Erde und ihrer Rotation von West nach Ost würden die Teile der Erde, die sich in Richtung der Umlaufbahn um die Sonne bewegen, die Summe, die entgegen-gerichteten Teile die Differenz beider Geschwindigkeiten annehmen.

Im Anschluß an diesen wissenschaftshistorischen Exkurs wollen wir nun einige moderne Deutungsversuche skizzieren, die wir für exemplarisch halten Es zeigt sich dabei, daß die Newton'sche Theorie gelegentlich fast zur Unkenntlichkeit verstümmelt wird, obgleich der physikalische Grundgedanke klar und einfach ist.

So spricht Pohl in seinem bekannten Werk von einer Überlagerung von Zentrifugalkräften und Anziehung [11]. In einem im übrigen sehr informativen Artikel in Meyers Physik-Lexikon wird dieser Gedanke wiederholt [12] Nach unserer Meinung sind solche Ausführungen zumindest in der Tendenz mißverständlich, da nicht klar genug heraus gearbeitet wird, welches Koordinatensystem zur Beschreibung des Phänomens benutzt wird. Damit bleibt der Unterschied zwischen Trägheitskräften (sogenannten Scheinkräften) und Gravitationskräften unklar. Es ist auch nicht ersichtlich, inwieweit die vorgetragene Theorie exakt oder angenähert ist.

In einem jüngst erschienenen Buch von H. Jodl über Felder [13] wird in dem Kapitel über Gravitation gar die Behauptung aufgestellt, die Gezeiten erzeugende Kraft komme durch Superposition von Zentrifugalkräften und der von der Erde selbst erzeugten Gravitationskraft zustande.

Es soll jedoch nicht unerwähnt bleiben, daß sich in der neuesten Auflage des Lehrbuches von Gerthsen u.a. eine völlig korrekte Theorie des Gezeitenphänomens findet, die auch eine Idee vermittelt, wie quantitativ vor-gegangen werden muß [14].

3 Physikalische Erklärung der Gezeiten

Wir wollen unter einer physikalischen Erklärung im wesentlichen die Angabe eines Modells verstehen, das es gestattet, (zu erklärende) beobachtbare physikalische Phänomene mit hinreichender Allgemeinheit und Genauigkeit zu prognostizieren bzw. zu reproduzieren.

Wir gehen hier von dem didaktischen Prinzip aus, daß eine Erklärung erst in einem entsprechenden Verständnis zu ihrem Ziel kommt und Erklärungsmodelle daher adressatenspezifisch zu differenzieren sind. In diesem Sinne ist die nun folgende Modellhierarchie zu verstehen: Sie soll skizzieren, wie man über einfache qualitative Vorstellungen bis hin zur quantitativen Behandlung des Problems die Gezeiten im Physikunterricht jeder Schulstufe auf verallgemeinerungsfähige Weise erklären kann.

3.1 Qualitatives Modell

Auf der qualitativen Stufe erscheint es uns wesentlich, ein hinreichend anschauliches Verhältnis von dem Zustand der Schwerelosigkeit zu haben.

Geht man vom Begriff der Schwere aus, so bedeutet die Abwesenheit von Schwere, daß etwa eine Federwaage keine Dehnung anzeigt. wenn man einen Körper an ihr aufhängt, um sein Gewicht zu bestimmen [15].

Wie läßt sich der Zustand der Schwerelosigkeit experimentell realisieren?

Man kann z.B. durch Beschleunigung der Aufhängevorrichtung einer Federwaage zeigen. daß ihre Dehnung und damit das Gewicht des zu wägenden Körpers beeinflußt wird. Beschleunigt man das System ,,Feder – Körper“ mit der (Erd-)Schwerebeschleunigung g, so verschwindet die Dehnung und damit das Gewicht des Körpers. In einem frei fallenden System ,,Feder- Körper herrscht Schwerelosigkeit. Die auf diese Weise experimentell-gedankenexperimentell zu vermittelnde Einsicht läßt sich durch Hinweise auf Beispiele wie Springen vom Sprungbrett oder Sprungturm im Schwimmbad, Aufnahmen aus Raumkapseln auf der Erdumlaufbahn etc. vertiefen.

Das Konzept der Schwerelosigkeit aus der Sicht eines Fallenden ist nun in Verbindung zu bringen mit ,,rotativen“ Fallbewegungen: Die Vorstellung, daß etwa eine erdumlaufende Raumkapsel frei fällt, widerspricht insofern dem lebensweltlichen Verständnis von Fallen, als sie der Erdoberfläche nicht näher kommt. Über die bekannte Newton'sche Veranschaulichung (Abb. 1) läßt sich allerdings schrittweise deutlich machen, daß eine Raumkapsel. ein Satellit, ja selbst der Mond in dem Sinne fallen, daß sie von der Geraden wegfallen, auf der sie sich fortbewegen würden, wenn nicht die Anziehungskraft der Erde auf sie wirkte: Läßt man einen Körper in der Nähe der Erdoberfläche los, so fällt er ca. 5 m in der ersten Sekunde. ein Objekt, das horizontal abgeschossen wird, fällt ebenfalls, auch wenn es sich horizontal weiterbewegt, 5 m. Schießt man dieses Objekt schließlich schnell genug ab, so kann der Fall eintreten, daß obwohl das Objekt 5 m gefallen ist, es immer noch den gleichen Abstand zur Erde hat wie vorher, weil die Erde sich in gleichem Maße von der gedachten Geraden ,,wegkrümmt“, wie das Objekt auf die Erde zufällt.

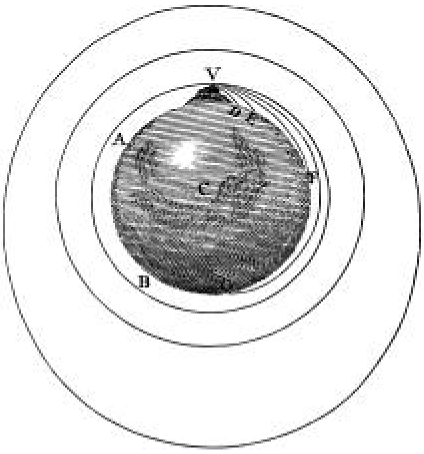

Abb. 1: Schematische Darstellung des freien Falls auf der Erde nach Newton Von einem Berg V aus wird ein Körper mit unterschiedlichen Anfangsgeschwindigkeiten horizontal weggeschleudert. Der Körper trifft mit zunehmender Anfangsgeschwindigkeit bei D, E, F, G auf, um bei einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit schließlich nicht wieder auf der Erdoberfläche aufzutreffen.

So gesehen sind ,,rotative“ Bewegungen eines Körpers um einen anderen Fallbewegungen. In einem mit dem fallenden Körper verbundenen Koordinatensystem herrscht demnach Schwerelosigkeit. Sie äußert sich nicht nur in dem Fehlen des Gewichts, sondern auch in der Abwesenheit von relativen Fallbeschleunigungen der einzelnen Teile des fallenden Körpers. Schwerelosigkeit herrscht nur in einem frei fallenden Koordinatensystem und ist an die Voraussetzung gebunden, daß alle Teile des fallenden Körpers oder Systems durch den schwere erzeugenden Körper die gleiche Fallbeschleunigung erleiden.

Der Mond fällt auf diese Weise ständig auf die Erde zu. Wegen der Gültigkeit des 3. Newton'schen Axioms fällt aber auch die Erde in analoger Weise auf den Mond zu. Beide zusammen fallen in Richtung auf ihren gemeinsamen Schwerpunkt, der innerhalb der Erde liegt. Die Größe der beiden Schwerebeschleunigungen ist umgekehrt proportional dem Verhältnis der Massen von Erde und Mond.

Da das Gravitationsfeld des Mondes aber inhomogen ist, die vom Mond hervorgerufene Schwerebeschleunigung demnach nach dem allgemeinen Gravitationsgesetz mit zunehmender Entfernung abnimmt, kann der Zustand der Schwerelosigkeit in Bezug auf den Mond nicht für alle Teile der Erde gleichzeitig eintreten. Er übt vielmehr auf die verschiedenen Volumenelemente des ausgedehnten Körpers Erde verschieden große Kräfte (Beschleunigungen) aus, die zwar zu einer resultierenden Beschleunigung des gesamten Erdkörpers führen, an verschiedenen Stellen aber geringfügig unterschiedliche Fallbeschleunigungen herbeiführen: Die resultierende Beschleunigung des gesamten Erdkörpers ist übrigens exakt gleich der vom Mond am Schwerpunkt der Erde hervorgerufenen Fallbeschleunigung (siehe unten). An der dem Mond zugewandten Seite der Erde haben nun die Massenelemente die Tendenz, schneller zu fallen als der Schwerpunkt.

Dies führt zu einer elastischen Deformation des festen Erdkörpers, während die frei verschiebbaren Wasserteilchen der Ozeane dem Einfluß folgen können. Somit läßt sich der Flutberg auf der dem Mond zugewandten Seite qualitativ verstehen. Auf der dem Mond abgewandten Seite beobachtet man einen entgegengesetzten Effekt. Die Massenelemente haben wegen der größeren Entfernung vom Mond die Tendenz, hinter den mondnäheren Massenelementen zurückzubleiben. Der Schwerpunkt der Erde wird stärker beschleunigt als diejenigen Massenelemente, die sieh auf der dem Mond abgewandten Seite der Erde befinden. Dies führt wiederum zu einer elastischen Deformation des festen Erdkörpers und zu dem zweiten Flutberg auf der dem Mond abgewandten Seite.

Analoge Überlegungen führen für die Punkte senkrecht zur Verbindungslinie Erde-Mond zu Stauchungen, d.h. zu zwei gegenüberliegenden Ebbe-Gebieten. Das Zusammendrücken der Erde (bzw. der Wassermengen) an diesen Stellen kommt also nicht dadurch zustande, daß wie bei einem kugelförmigen Luftballon, den man in die Länge zieht, wegen der Tendenz zum konstanten Volumen Einschnürungen an den entsprechenden ,,Seiten“ auftreten, sondern, um im Bilde zu bleiben, bei der Entstehung von Ebbe und Flut wird zusätzlich an den Seiten ,,gedrückt".

Die tägliche Rotation der Erde um ihre eigene Achse führt nun dazu, daß in jedem Augenblick die Lage eines Punktes der Erdoberfläche zum Mond geändert wird mit dem Resultat, daß der Mond sozusagen den doppelten Flutberg an der ihm zugewandten und abgewandten Seite ,,hinter sich her zieht“. Damit ist das Auftreten von zwei Flutbergen und zwei Ebbetälern innerhalb von 24 Stunden und 60 Minuten prinzipiell erklärt.

Entscheidend ist also die Bemerkung, daß der Zustand der Schwerelosigkeit in bezug auf den Mond wegen der verhältnismäßig großen Ausdehnung der Erde und der Inhomogenität des Gravitationsfeldes des Mondes auf der Erde nur angenähert realisiert ist. Die wegen der großen Masse der Erde beträchtlichen Schwerewirkungen, die diese auf jedes ihrer Teile selbst ausübt, sind demgegenüber ganz irrelevant, wie wir weiter unten ausführen werden.

3.2 Halbquantitatives Modell

Das Ergebnis der vorangegangenen Ausführungen läßt sich folgendermaßen zusammenfassen: Die Erscheinung der Gezeiten kommt dadurch zustande, daß der starre Körper Erde nur eine Beschleunigung gegen den Mond annehmen kann, während die beweglichen Wasserteile auf der Erde je nach ihrer Lage verschiedene Beschleunigungen erfahren.

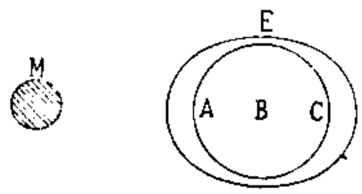

Abb. 2: Schematische Darstellung der Flutberge auf der dem Mond zugewandten Seite A und abgewandten Seite B der Erde nach E. Mach [9].

Wir wollen diesen qualitativen Gedanken im folgenden dadurch präzisieren, daß wir, einem Vorschlag E. Mach's folgend [16], ausgewählte Punkte einer quantitativen Abschätzung unterziehen. Die Punkte A, B, C der Erde E liegen auf der Verbindungslinie Erde-Mond (siehe Abb. 2). Sehen wir diese Punkte als frei an, so betragen ihre Beschleunigungen gegen den Mond entsprechend $a + \Delta a$, a, $a - \Delta a$.

Der starre Körper als Ganzes nimmt hingegen die Beschleunigung a an. (Dieses ist keineswegs trivial und wird weiter unten bewiesen.) Mit diesen Voraussetzungen kommt man zu folgender Beschleunigungsbilanz:

die freien Punkte	**A**	**B**	**C**
die Beschleunigungen der Punkte im Inertialsystem	$-(a + \Delta a) + g$	$-a$	$-(a - \Delta a) - g$
die Führungsbeschleunigung der Erde	a	a	a
die resultierende Beschleunigung gegen die Erde	$g - \Delta a$	0	$-(g - \Delta a)$

Hieraus kann man den Schluß ziehen, daß die Beschleunigung des Wassers an der Seite A und C gegen den Erdmittelpunkt (also das Gewicht des Wassers) um den gleichen Betrag vermindert erscheint. Das Wasser wird also in A und C höher stehen und zu einer zweimaligen Flutwelle pro Erdumdrehung, d.h. pro Tag führen.

Um eines der häufigsten Mißverständnisse bei der Erklärung der Gezeiten auszuräumen, wonach wegen des nahezu konstanten Abstandes Erde und Mond in relativer Ruhe zueinander und nicht in beschleunigter Bewegung zueinander begriffen werden könnten, zeigen wir durch eine ähnlich elementare quantitative Abschätzung wie oben, daß man unter diesen Voraussetzungen zu wesentlich anderen Erscheinungen als zu den uns bekannten Gezeiten kommen müßte. Die Voraussetzung der relativen Ruhe zwischen Erde und Mond bedeutet in der obigen Bezeichnungsweise, daß die Führungsbeschleunigung der Erde $a = 0$ zu setzen ist. Dann erhält man analog:

die freien Punkte	**A**	**C**
die Beschleunigungen...	$-(a + \Delta a) + g$	$-(a - \Delta a) - g$
die resultierenden Beschleunigungen...	$(g - \Delta a) - a$	$-(g - \Delta a) - a$

Nach diesem Ergebnis würde das Wassergewicht auf der dem Mond zugewandten Seite verkleinert, während es an der dem Mond abgewandten Seite vergrößert würde, ein Resultat, das häufig gerade bei Schülern als Erklärung anzutreffen ist.

3.3 Quantitatives Modell

Bevor wir zur exakten Theorie des gezeigten Phänomens kommen, wollen wir uns durch einige einfache zahlenmäßige Abschätzungen einen Eindruck von der Größe der zu erwartenden Effekte machen.

Nach dem allgemeinen Gravitationsgesetz erzeugt ein Körper der Masse M im Abstand $\vec{r}$ von seinem Schwerpunkt die Schwerebeschleunigung

$$\vec{a} = g\,\frac{M}{r^3}\,\vec{r} \qquad (1)$$

γ ist darin die allgemeine Gravitationskonstante.

Setzt man hierin die entsprechenden Massen und Abstände ein, so erhält man für die Beschleunigungen, die der Mond bzw. die Sonne am Orte der Erde hervorrufen, die Werte:

Mond: a = $3{,}32 \cdot 10^{-5}$ m/s^2

Sonne: a = $5{,}90 \cdot 10^{-3}$ m/s^2.

Die Sonne ruft also am Orte der Erde eine 178 mal größere Schwerebeschleunigung als der Mond hervor. Dieses Ergebnis läßt bei einer oberflächlichen Betrachtungsweise Zweifel an der Hypothese aufkommen, daß es in erster Linie der Mond ist, der für die Gezeiten verantwortlich ist.

Bedenken wir nun aber, daß es nach unserer qualitativen Deutung nicht auf die absolute Stärke der Schwerebeschleunigung, sondern auf die Inhomogenität des Schwerefeldes der beiden Himmelskörper ankommt, so ergibt sich ein anderes Bild.

Die relative Veränderung eines Schwerefeldes der Art (1) bei Abstandsveränderung und damit seine Inhomogenität, kann gemessen werden durch:

$$\Delta a/a = -\,2\Delta r/r \qquad (2)$$

Setzt man hier für $2\Delta r$ den Erddurchmesser ein, so ergibt sich für die Inhomogenität der beiden Schwerefelder am Orte der Erde:

Mond: $\Delta a/a = 6{,}62 \cdot 10^{-2}$,

Sonne: $\Delta a/a = 1{,}70 \cdot 10^{-4}$.

Das Mondfeld ist demnach am Orte der Erde und über eine räumliche Erstreckung von der Größe des Erddurchmessers 389 mal inhomogener als das Schwerefeld der Sonne. Hieraus folgt eine um den Faktor 389 : 178 = 2,19 stärkere Gezeitenwirkung des Mondes gegenüber der Sonne.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir nun den Hauptsatz über die Größe der Gezeiten erzeugenden Beschleunigung formulieren:

Die vom Mond verursachte Gezeitenbeschleunigung relativ zu dem mit dem Schwerpunkt der Erde verbundenen Bezugssystem ist die Differenz aus der Schwerebeschleunigung des Mondes an einem Punkt der Erdoberfläche P und am Schwerpunkt der Erde S (siehe Abb. 3).

In Formeln lautet dieser Hauptsatz:

$$\Delta\vec{a}\left(\vec{r}^{\,'}\right) = \vec{a}\left(\vec{r}\right) - \vec{a}\left(\vec{r}_s\right) \qquad (3)$$

wobei: $\vec{r}^{\,'} := \vec{r} - \vec{r}_s$

Er ist insofern nicht trivial, als zu seinem Beweise zwei Punkte zu zeigen sind:

1. Die für alle Punkte der Erde gleiche Führungsbeschleunigung (in der Literatur oft Zentrifugalbeschleunigung genannt), die zur Ermittlung der auftretenden Trägheitskräfte benötigt wird, ist gleich der durch den Mond hervorgerufenen Beschleunigung der Erde als starrer Körper.

2. Diese ist identisch mit dem Wert der Schwerebeschleunigung, die der Mond am Erdschwerpunkt hervorrufen würde, wenn die Erde nicht da wäre.

Sei nun M in (1) die Mondmasse und

$$g = g\,\frac{M_E}{R^2} \qquad (4)$$

die von der Erde an ihrer Oberfläche hervorgerufene Schwerebeschleunigung (M_E ist die Erdmasse, R der Erdradius), so erhält (3) exakt die Form

$$\Delta\vec{a} = g\,\frac{M}{M_E}\left(\frac{R}{r_s}\right)^3 \vec{f}$$

Mit

$$\vec{f} := \frac{\vec{r}_s}{R} - \frac{\vec{r}}{R}\left(\frac{r_s}{r}\right)^3$$

wo $\vec{r} = \vec{r}_s + \vec{r}\,'$.

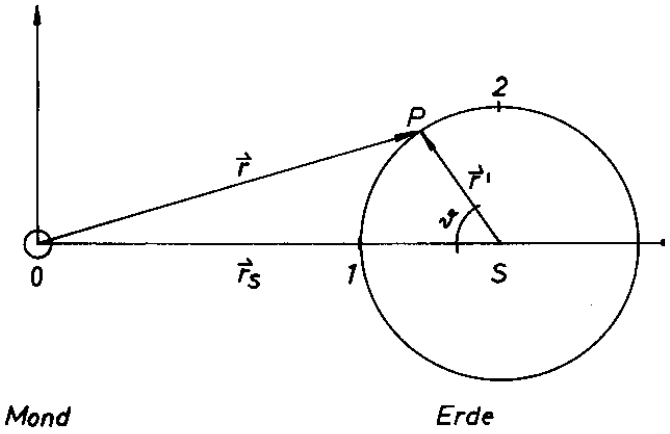

Abb. 3: Schematische Darstellung der geometrischen Beziehungen zwischen Erde und Mond im erdfixierten (aber nicht an der Erdrotation teilnehmenden) ebenen Koordinatensystem.

Führt man ein ebenes Koordinatensystem so ein, daß die x-Achse in die Richtung der Verbindung Mondschwerpunkt - Erdschwerpunkt zeigt, so lassen sich die vorkommenden Vektoren $\vec{r}, \vec{r}_s, \vec{r}\,'$ und in folgender Weise in Koordinaten schreiben (Abb. 3)

$$\vec{r}\,' = R\begin{pmatrix}\cos J\\ \sin J\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_s = r_s\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix}r_s + R\cos J\\ R\sin J\end{pmatrix}$$

Somit ergibt sieh für die in (5) vorkommende Vektorfunktion (6a) der explizite Ausdruck

$$\vec{f} = \begin{pmatrix}\frac{r_s}{R} - \left(\frac{r_s}{r}\right)^3\left(\frac{r_s}{R} + \cos J\right)\\ -\left(\frac{r_s}{r}\right)^3 \sin J\end{pmatrix} \qquad (6b)$$

Man überzeugt sich zunächst davon, daß der Betrag der in (5) vorkommenden Vektorfunktion (6a) bzw. (6b) im gesamten Variationsbereich der Winkelvariablen von der Größenordnung 1 ist. Damit ergibt sich aus (6) für die Größe der gezeitenerzeugenden Beschleunigung

$$\frac{\Delta a}{g} \cong \frac{M}{M_E}\left(\frac{R}{r_s}\right)^3 \qquad (8)$$

Das bedeutet für den Mond: $a = 5.60 \cdot 10^{-8}$ g,

für die Sonne: $a = 2.56 \cdot 10^{-8}$ g.

Hieraus erkennt man den behaupteten Größenunterschied zwischen Mondwirkung und Sonnenwirkung. Weiterhin dürfte den unbefangenen Leser, der diese Zahlenwerte erstmalig zur Kenntnis nimmt, vielleicht die Kleinheit der gezeitenerzeugenden Beschleunigung im Vergleich zur Erdschwere beeindrucken angesichts ihrer drastischen Auswirkung auf die Bewegung der Wassermassen der Ozeane.

Wir wollen die Vektorfunktion (6) nicht weiter analytisch untersuchen. Es bereitet keinerlei Schwierigkeiten, sie in einem Polardiagramm für Orte der Erdoberfläche unter Zuhilfenahme eines Taschenrechners graphisch darzustellen. Auf diese Weise ist die Abb. 4 entstanden [17].

In der Literatur ist es jedoch üblich, nicht diese Funktion, die den exakten Ausdruck für die Gezeitenbeschleunigung darstellt, selbst zu betrachten sondern das erste Glied einer Taylorentwicklung nach der kleinen Größe R/r_s. Dieses Vorgehen wird auch bereits durch die Hauptformel (3) nahegelegt. Es hat wohl vor allem historische Gründe, da der entstehende Ausdruck einfacher analytisch zu diskutieren ist, was in Zeiten ohne die numerischen Hilfsmittel, die heute jedem Schüler zur Verfügung stehen, von Bedeutung war. Das Ergebnis der Entwicklung in linearer Näherung ist [19]:

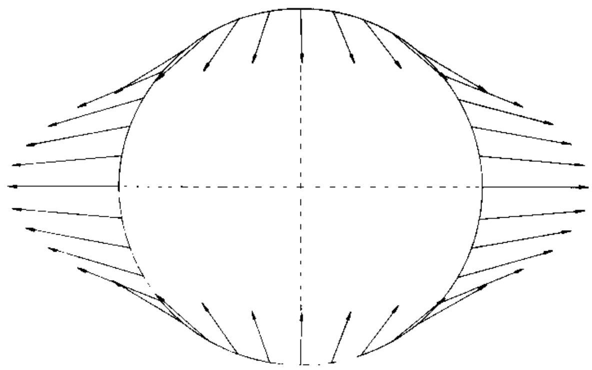

Abb. 4 Schematische Darstellung der Gezeitenwirkung längs der Erdoberfläche, Die Vektorpfeile geben Richtung und Betrag der entsprechenden Gezeitenbeschleunigung an.

$$\vec{f} = 3\cos J \cdot \vec{e} - \vec{e}'$$

mit

$$\vec{e} := \frac{\vec{r}_s}{r_s}, \ \vec{e}' := \frac{\vec{r}'}{r'}$$

bzw. in Koordinaten

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 2\cos J \\ -\sin J \end{pmatrix}$$

Wir wollen uns hier darauf beschränken, einige Eigenschaften der Funktion (9) aufzuzeigen. Die Angaben lassen sich anschaulich anhand der Abb. 3 nachvollziehen.

Für ϑ =0°, 180° ist $\vec{f} = \pm 2\vec{e}'$.

Weiterhin gilt für ϑ = 90°, 270°, $\vec{f} = \pm \vec{e}'$.

Die Gezeitenbeschleunigung hat also in der Tat an den vier herausgegriffenen typischen Stellen die in **3.1** behauptete dehnende und stauchende Wirkung auf den Erdkörper. Da sie an diesen Stellen senkrecht zur Erdoberfläche gerichtet ist, ruft sie dort allerdings lediglich eine Verminderung bzw. Vergrößerung der Erdbeschleunigung hervor.

Wichtiger sind diejenigen Stellen auf der Erdoberfläche, an denen eine Horizontal-Komponente vorhanden ist und überdies möglichst groß ist. Denn dort wirken horizontale Gezeitenkräfte, die zu Gezeitenströmungen Veranlassung geben.

Die Forderung, daß die Gezeitenbeschleunigung überhaupt horizontal ist, läßt sich durch die Beziehung

$$\vec{f} \cdot \vec{e}' = 0, \ 3\cos^2\vartheta = 1 \tag{10}$$

zum Ausdruck bringen. Lösungen von (10) sind ϑ = ± 54,7° und ± 125,30°. Allerdings sind dies nicht die Orte maximaler Horizontalkomponente von f. Die Horizontalkomponente selbst ist nach bekannten Sätzen der Vektorrechnung gegeben durch

$$\vec{e}'x\left(\vec{f}x\vec{e}'\right) = \vec{e}'x\left(\vec{e}x\vec{e}'\right) \cdot 3 \cdot \cos J \ , \tag{11a}$$

(Dabei ist x das Zeichen für das Kreuzprodukt). Ihr Betrag

$$f := \left|\vec{f}\right| = 3 \cdot \left|\cos J \cdot \sin J\right| = \frac{3}{2}\left|\sin 2J\right| . \tag{11b}$$

Ihr Maximalwert tritt ein für ϑ = ± 45°, ± 135° und hat den Wert 1,5. Die Nullstellen von (11b) liegen bei ϑ = 0°, ± 90°, 180° in Übereinstimmung mit (9c).

Damit sind die Haupteigenschaften der Gezeiten analytisch nachgewiesen.

Diese sind:

1. Auftreten von zwei Flutbergen (Hochwasser) im Zenith und Nadir des Mondes;
2. Niedrigwasser um 1/4 Mondtag verschoben und
3. stärkste Gezeitenströmung mitten zwischen Hoch- und Niedrigwasser.

4. Äquivalenzprinzip: Schwere- und Trägheitsfelder

Im vorangegangenen Kapitel sind wir den Beweis für den Hauptsatz (3) über die Größe der Gezeitenbeschleunigung schuldig geblieben. Den Beweis werden wir in zwei Schritten führen:

Erstens werden wir aufzeigen, wie sich durch Übergang zu einem geeignet beschleunigten („frei fallenden") Bezugssystem das Schwerefeld des Mondes lokal, jedoch nicht global wegtransformieren läßt.

Zweitens werden wir zeigen, daß die Größe der „Führungs"-Beschleunigung den behaupteten Wert hat.

4.1 Beschleunigte Bezugssysteme, Schwerelosigkeit und allgemeines Äquivalenzprinzip

In der vorangegangenen Diskussion der Gezeiten haben wir implizit von verschiedenen Bezugssystemen Gebrauch gemacht. Immer dann, wenn wir vom freien Fall der Erde, d.h. der beschleunigten Bewegung der Erde in Richtung auf den gemeinsamen Schwerpunkt von Erde und Mond sprachen, bezogen wir uns auf das Inertialsystem **I**, welches in diesem Schwerpunkt fixiert ist. Wenn von Schwerelosigkeit die Rede war. gingen wir hingegen vom Nichtinertialsystem **K** aus, das mit dem Schwerpunkt der Erde fest verbunden ist, jedoch nicht an der Erdrotation teilnimmt, sondern eine feste Orientierung relativ zum Fixsternhimmel hat.

Diese Sprechweise ist der qualitative Ausdruck der Tatsache, daß die physikalischen Gesetze in einem beschleunigten Bezugssystem identisch den Gesetzen in einem Inertialsystem sind, wenn man eine zusätzliche Kraft, die sogenannte Trägheitskraft, einführt. die im Falle der Schwerelosigkeit gerade die Gravitationskraft aufhebt.

Es wurde dann weiter festgestellt, daß das gravitationale Beschleunigungsfeld variabel über die Erde anzunehmen ist. während das durch Einführung des beschleunigten Bezugssystems **K** „hervorgerufene scheinbare" Beschleunigungsfeld homogen ist.

Dieser Unterschied in der räumlichen Struktur des Gravitationsfeldes und des Feldes der Trägheitskräfte ist für das Verständnis der Gezeiten ganz wesentlich. Durch eine allzu sorglose, nicht auf reale Phänomene bezogene Anwendung des Äquivalenzprinzips der allgemeinen Relativitätstheorie kommt man gelegentlich zu Aussagen wie: Gravitationsfelder lassen sich durch Einführung geeignet beschleunigter Bezugssysteme wegtransformieren oder: Schwere- und Trägheitsfelder lassen sich empirisch nicht unterscheiden. A. Einstein selbst und als einer seiner klarsten und bedeutendsten Interpreten M. Born waren sich der Tatsache wohl bewußt, daß solche Aussagen nur lokal, nicht aber global richtig sind [20]. Wie die Gezeiten auf der Erde zeigen, tritt Schwerelosigkeit nur lokal, in einem im Vergleich zur Inhomogenität des Schwerefeldes kleinen Raumgebiet auf. Umgekehrt müssen in jedem genügend großen Raumgebiet, z.B. in einem Raumschiff, Gezeiteneffekte auftreten.

Sei Δm ein Massenelement der Erde am Orte r, so ruft der Mond allein im Inertialsystem **I** an diesem Massenelement eine Schwerebeschleunigung gemäß der 1. Newton'schen Gleichung hervor:

$$\Delta m \cdot \vec{a}(\vec{r}) = \Delta\vec{F}(\vec{r}). \tag{12}$$

Die Kraft bestimmt sich hier gemäß (1) aus dem allgemeinen Gravitationsgesetz zu:

$$\Delta\vec{F}(\vec{r}) = g\,\frac{\Delta m \cdot M}{r^3}\vec{r}\ . \tag{13}$$

Gehen wir nun zu einem beschleunigten Bezugssystem **K** über, das gegenüber **I** die Beschleunigung a_0 annimmt, so ist in die Newton'sche Grundgleichung die Trägheitskraft einzuführen. und man erhält für die Beschleunigung im neuen Bezugssystem

$$\Delta m \cdot \vec{a}'(\vec{r}) = -\Delta m \cdot \vec{a}_0 + \Delta F(\vec{r}). \tag{14}$$

Hierbei ist ganz unwesentlich, ob die Bewegung von **K** gegen **I** gradlinig ist oder nicht. Es kommt auch nicht darauf an. ob $\vec{a}_0$ zeitlich konstant ist. In jedem Fall ist das Trägheitskraftfeld zu jedem beliebigen Zeitpunkt im Gegensatz zum Gravitationsfeld per Definition homogen. Wichtig ist, daß **K** gegen **I** nicht rotiert, da andernfalls Zentrifugal- und Coriolis- Kräfte auftreten. Es erscheint uns daher irreführend, in diesem Zusammenhang, wie es gelegentlich geschieht, von Zentrifugalkräften bei der Entstehung der Gezeiten zu reden [21]. Wir betonen, daß es auf die sogenannte „Führungs"- Beschleunigung $\vec{a}_0$ des Bezugssystems **K** gegenüber dem Inertialsystem **I** ankommt.

Ein Blick auf die Gleichung (14) lehrt, daß bei homogenem Schwerefeld, d.h. konstanter Gravitationskraft, die rechte Seite für alle Orte *r* durch geeignete Wahl von $\vec{a}_0$ zum verschwinden gebracht werden kann. In diesem Fall verschwindet die Beschleunigung. d.h. es herrscht Schwerelosigkeit.

Aus Gleichung (14) sieht man aber auch ganz deutlich, daß dies an die Voraussetzung der Äquivalenz von schwerer und träger Masse, zweier begrifflich unterschiedener physikalischer Größen, gebunden ist. Diese Äquivalenz kann aber als empirisch gesichert gelten [22].

Für den Fall, daß das Schwerefeld nicht homogen ist, dieser Fall liegt bei uns vor, kann man versuchen, die rechte Seite der Gleichung (14) dadurch möglichst klein zu machen, daß man setzt:

$$\Delta m \cdot \vec{a}_0 = \Delta\vec{F}_{\text{zwischen}}, \qquad (15)$$

wobei man für die Kraft einen Zwischenwert aus dem Wertebereich auswählt, den sie im Raumgebiet, das von der Erde ausgefüllt wird, annimmt. Dies Verfahren kann bei nicht zu starker Inhomogenität des Schwerefeldes nahezu zum Ziel führen, wird aber niemals zu einem beschleunigten Koordinatensystem führen, in dem exakt Schwerelosigkeit herrscht.

4.2 Richtige Wahl der Führungsbeschleunigung $\vec{a}_0$

Wir haben bereits oben gesagt, daß wir für die Beschreibung der Gezeiten ein beschleunigtes Bezugssystem verwenden wollen, welches mit der gesamten Erde gegen den Mond zu frei fällt. Das bedeutet, wir haben zu setzen

$$\vec{a}_0 = \vec{a}_s .$$

Hierin ist a_s die Schwerpunktbeschleunigung. Es ist nun keineswegs trivial, daß die Schwerpunkt-beschleunigung exakt gleich ist der Beschleunigung, die der Mond am Orte des Schwerpunktes der Erde erzeugt. Wir behaupten also, daß die Gleichung

$$\vec{a}_s = \vec{a}(\vec{r}_s) \qquad (17)$$

besteht, daß sie aber nicht für beliebige Kraftgesetze und im kugelsymmetrischen Gravitationsfeld nicht für beliebige Massenverteilungen gilt. Diese Behauptung wird plausibel gemacht durch den Hinweis auf die Bewegungsgleichung des Schwerpunktes:

$$M_E \vec{a}_s = \int_{\text{Erde}} \Delta\vec{F}(\vec{r}) . \qquad (18)$$

Denkt man sich hierin (13) eingetragen, so dürfte einleuchten, daß das Integral im allgemeinen nicht gleich

$$M_E \frac{\Delta\vec{F}(\vec{r}_s)}{\Delta m} \qquad (19)$$

zu sein braucht [22].

Wir brauchen aber keineswegs das in (18) vorkommende Integral explizit auszuwerten. Newton selbst hat noch elementargeometrisch nachgewiesen, daß eine kugelsymmetrische Massenverteilung im Außenraum ein Gravitationsfeld erzeugt, welches identisch ist mit dem Feld einer Punktmasse, die man sich im Schwerpunkt der Massenverteilung konzentriert denken kann [24]. Weiterhin hat er nachgewiesen, daß eine kugelförmige Massenverteilung in einem zentralsymmetrischen Gravitationsfeld wie ein Massenpunkt mit der entsprechenden Gesamtmasse beschleunigt wird. Das letztere ist gerade die von uns benötigte Aussage. Sie folgt übrigens aus der ersten unter Verwendung des dritten Newton'schen Axioms.

Wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit der beiden Behauptungen ist neben der Kugelsymmetrie der Massenverteilungen die besondere Form des Kraftgesetzes $1/r^2$. Für andere Kraftgesetze und andere Konfigurationen gelten sie nicht.

5. Anwendung: Bestimmung der Mondmasse

Bei der Behandlung der Gravitationstheorie wird sowohl in Schul- wie auch in Universitätslehrbüchern häufig das Problem der Massenbestimmung behandelt. So wird die Erdmasse aus der Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche aus den Umlaufzeiten von Satelliten oder aus der Mondbahn bestimmt. Entsprechendes gilt für die Bestimmung der Sonnenmasse. Jedoch fehlt nach unserer Erfahrung ein Hinweis auf eine Möglichkeit der Bestimmung der Mondmasse (abgesehen von Methoden, die die Bahndaten von künstlichen Mondsatelliten benutzen). Im Gegenteil wird häufig darauf hingewiesen, daß sich aus den Bahndaten von Satelliten wohl die Massen der Zentralkörper, nicht jedoch die Massen der Satelliten ermitteln lassen. Es ist dies wiederum eine Folge der Äquivalenz von schwerer und träger Masse, die dazu führt, daß sich die Masse von Satelliten, allgemein von fallenden Körpern, aus der Bewegungsgleichung heraushebt.

Andererseits findet sich der Wert der Mondmasse in allen einschlägigen Datensammlungen, und zwar selbstverständlich vor Durchführung von Raumflügen zum Mond. So ist es für ein durchschnittliches Lehrbuch für die Sekundarstufe I eine Selbstverständlichkeit, anläßlich der Besprechung des Gewichts von Körpern darauf hinzuweisen, daß dieses keine Körpereigenschaft ist, sondern ortsabhängig ist. Insbesondere wird darauf hingewiesen, daß das Gewicht von Körpern auf der Mondoberfläche etwa 1/6 des Gewichts auf der Erdoberfläche beträgt. Diese Aussage setzt die Kenntnis der Mondmasse wie auch seines Durchmessers voraus.

Es ist merkwürdig und unseres Erachtens unbefriedigend, daß demgegenüber über die empirische Ermittlung der Mondmasse fast nichts mitgeteilt wird, obgleich Newton das Problem prinzipiell und quantitativ bereits gelöst hat.

Der Grundgedanke zur Bestimmung der Mondmasse muß doch folgender sein: Wenn die (Schwere) Masse des Mondes überhaupt meßbar ist, so muß die Bestimmung aus empirisch feststellbaren Auswirkungen der Mondschwere erfolgen. Wenn die Gezeiten eine Folge der Mondschwere sind, so muß sich aus ihnen im Prinzip ein Wert für die Mondmasse ableiten lassen. Dies ist in der Tat der Fall, wie wir im folgenden zeigen werden.

Eine weitere empirisch überprüfbare Auswirkung ist die Präzession der Erdachse. Auf dieses Verfahren das ebenfalls von Newton angegeben wurde, wollen wir nicht weiter eingehen. Jedenfalls stehen damit vor aller künstlichen Raumfahrt zwei voneinander unabhängige Methoden zur Bestimmung des Massenverhältnisses von Erde und Mond zur Verfügung.

Ausgangspunkt der Überlegung ist der ungestörte mittlere Tidenhub, wie er im freien Ozean (z.B. Pazifik) an einem Atoll als mit der Erde fest verbundenem Pegel zu ermitteln ist. (Um ein Maß für die Stärke der Gezeiten erzeugenden Kräfte zu haben, ist es nämlich erforderlich, Einflüsse der Meeresberandungen auf die Gezeiten; die zu Resonanzeffekten führen, auszuschalten.) Dieser ungestörte mittlere Tidenhub wird in der Literatur zu ca. 2 engl. Fuß (=0,61 m) angegeben [25].

Für die weitere Rechnung ist es zweckmäßig, das Potential der Gezeitenbeschleunigung einzuführen. Allgemein ergibt sich der Potentialunterschied zwischen zwei Orten 1 und 2 auf der Erde zu

$$j1 - j2 = -\int_1^2 \Delta\vec{a} \cdot d\vec{r}\ . \tag{20}$$

Es ist formal ganz analog eingeführt zum Potential der Schwerebeschleunigung das mit der Hubarbeit zusammenhängt. Da $\Delta\vec{a}$ eine lineare Vektorfunktion ist von der Gestalt

$$\Delta\vec{a} = C \cdot \vec{r}\ , \tag{21}$$

wobei C ein konstanter Tensor zweiter Stufe ist:

$$C := \frac{gR^2}{r_s^3} \cdot \frac{M}{M_E}\left(3\vec{e}\vec{e} - I\right), \text{ (I ist der Einheitstensor)} \tag{22}$$

läßt sich das Integral (20) wie bei jeder linearen Funktion leicht ausführen. Das Ergebnis ist

$$j1 - j2 = \left[-\frac{1}{2} \cdot \vec{r} \cdot C \cdot \vec{r}\right]_1^2 . \tag{23}$$

In Koordination ergibt sich

$$j\,1 - j\,2 = \left[-\frac{gR^2 M}{2 \cdot r_s^3 \cdot M_E} \left(3\cos^2 J - 1\right) \cdot r^2 \right]_1^2 . \tag{24}$$

Sei nun der Punkt 1 ein Punkt mit Niedrigwasser, der Punkt 2 mit Hochwasser, so ist $\vartheta_1 = \pm\pi/2$ und $\vartheta_2 = \pi, 0$. Der Potentialunterschied zwischen den beiden Punkten ist dann

$$\Delta j = j\,1 - j\,2 = -\frac{3}{2} \cdot g \cdot \frac{R^4}{r_s^3} \cdot \frac{M}{M_E} . \tag{25}$$

Danach herrscht am Orte des Hochwassers ein hinsichtlich der Gezeitenbeschleunigung niedrigeres Potential als am Orte des Niedrigwassers. Das bedeutet, daß eine Wassermenge, die unter dem Einfluß der Gezeitenkraft von einen zur anderen Stelle strömt, Energie gewinnt. Diese Energie wird durch die Hubarbeit gegen die Erdbeschleunigung wieder aufgezehrt. Das Gleichgewicht wird dadurch bestimmt, daß der Potentialzuwachs im Schwerefeld der Erde gleich sein muß der Potentialabnahme im Feld der Gezeitenkraft. Hieraus ergibt sich die Bedingung

$$\Delta h \cdot g = \left|\Delta j\right| . \tag{26}$$

Δh ist darin der mittlere Tidenhub. Wie man sieht, läßt sich aus der Bedingung (26) zusammen mit der Gleichung (25) das gesuchte Massenverhältnis bestimmen.

Die vorhergehende Überlegung wird noch anschaulicher, wenn man sieh die von Fliesenlegern viel verwendete sogenannte Schlauchwaage vor Augen führt. Sie ist nichts weiter als eine sogenannte kommunizierende Röhre. Füllt man nun in das eine Ende einer solchen Schlauchwaage Flüssigkeit mit geringerer spezifischen Gewicht als dem des Wassers ein, so wird der Flüssigkeitsspiegel auf dieser Seite offensichtlich höher stehen. Entsprechend läßt sich das Hochwasser als Folge der Tatsache interpretieren, daß unter dem Einfluß der Gezeitenkraft das spezifische Gewicht des Wassers an diesen Stellen reduziert wird.

Geht man nun in Gleichung (25) mit dem beobachteten mittleren Tidenhub ein, so ergibt sich ein Wert für das Massenverhältnis Mond/Erde, der in der richtigen Größenordnung liegt, jedoch zu hoch ist. Ein genaueres Resultat ergibt sieh, wenn man den Einfluß der Sonne berücksichtigt. Selbstverständlich führt auch dieser zu einem Potentialunterschied längs der Erdoberfläche von der Form (24). Mitteln wir hierin nun über alle Winkel η, so ergibt sich infolge des Sonneneinflusses ein mittlerer Potentialunterschied

$$\overline{\Delta j}_S = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{M_S}{M_E} \cdot \frac{R^4}{r_s'^3} . \tag{27}$$

Hierin sind M_s die Sonnenmasse und r_s' der Radius der Erdbahn. Insgesamt ergibt sich:

$$\Delta h = \frac{R^4}{M_E} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{M}{r_s^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_s}{r_s'^3} \right). \tag{28}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$M = \frac{2}{3} \cdot \frac{r_s^3}{R^4} \cdot \Delta h \cdot M_E - \frac{1}{3} \left(\frac{r_s}{r_s'} \right)^3 \cdot M_S \tag{29}$$

Das Ergebnis lautet:

$$M = (8.39 - 1.14) \cdot 10^{22} kg$$

$$= 7.25 \cdot 10^{22} kg .$$

Der zweite Summand kommt durch Berücksichtigung des mittleren Einflusses der Sonne auf den Tidenhub zustande. Man kann auch sagen, daß der Mond allein einen geringeren als den beobachteten mittleren Tidenhub verursacht. Der auf diese Weise ermittelte Wert für die Masse des Mondes stimmt ausgezeichnet mit dem Literaturwert überein. Dieser beträgt $7.34 \cdot 10^{22}$ kg.

6. Schluß:

Dem unterschiedlichen Auffassungsvermögen verschiedener Adressatengruppen entsprechend (z.B. Schüler der Sekundarstufe I bzw. Schüler der Sekundarstufe II) wurden mehrere Modelle diskutiert, durch die das äußerst komplexe Phänomen der Gezeiten auf das jeweils angemessen erscheinende Maß reduziert wurde.

Das einfachste Modell dient der qualitativen Erklärung der Vorgänge von Ebbe und Flut und erscheint daher für diejenigen Adressaten als angemessen, die über quantitative physikalische Begriffe noch nicht verfügen. Als Voraussetzung sind die Kenntnis der Massenanziehung und deren Abhängigkeit vom Abstand auf dem Niveau einer einfachen Je-desto-Beziehung, sowie ein anschauliches Verständnis des freien Falls und der Schwerelosigkeit anzusehen. Da bereits die Schüler der Primarstufe i.a. über elementare Erfahrungen mit der Erdanziehung, dem Fallen von Körpern etc. verfügen, sollte es bereits auf dieser Stufe möglich sein, ein qualitatives Verständnis der Gezeiten zu vermitteln. Das gilt erst recht für Schüler der Sekundarstufe 1. Nach den geltenden Lehrplänen sollte es auf dieser Stufe sogar möglich sein, unter Verwendung der quantitativen Begriffe Kraft, Beschleunigung etc. das einfache Modell zu einem halbquantitativen Modell zu erweitern, wodurch u. a - das Auftreten der beiden dem Mond gegenüberliegenden Flutberge quantitativ erfaßbar wird. Der weiteren ,,Quantifizierung“ des Modells sind im Rahmen der Sekundarstufe I indes bald Grenzen gesetzt. Zwar ließe sich über die Kenntnis der elementaren Vektorrechnung auch noch das Auftreten von Horizontal-komponenten der Gezeitenkräfte und damit von Ebbetälern und Gezeiten-Strömungen verständlich machen, über zahlenmäßige Abschätzungen käme man hingegen wohl nicht hinaus.

Die volle Erfassung des oben diskutierten quantitativen Modells setzt Kenntnisse der Vektoranalysis voraus und ist daher weitgehend der Sekundarstufe II vorbehalten.

Die Bezeichnung ,,quantitativ“ für dieses Modell darf allerdings nicht darüber hinwegtäuschen, daß auch damit erst eine sehr grobe Annäherung an die wirklichen Vorgänge möglich wird Dem jeweiligen praktischen Interesse entsprechend (z.B. die Strömungsgeschwindigkeiten der durch die Gezeiten bewirkten Wasser-bewegungen zu berechnen) gibt es eine Vielzahl von quantitativen Modellen, die für den Nichtfachmann aber bald das überschaubare Maß überschreiten und die wesentlichen Merkmale verstellen.

A N H A N G

A Herleitung der linearen Näherung

Methode 1

Wegen $\left|\vec{r}\right| = R(\equiv Erdradius) << \left|\vec{r}_S\right|$ und $\vec{r} = \vec{r}_S + \vec{r}\,'$ liegt es nahe, in Formel $(3)\vec{a}(\vec{r}\,')$ an der Stelle $\vec{r}_S$ zu entwickeln:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(\vec{r})\Big|_{\vec{r}_S} + \vec{R}\cdot\nabla\vec{a}(\vec{r})\Big|_{\vec{r}_S} + \ldots \qquad \text{(A1)}$$

In 0. Näherung kann die Erde als Massenpunkt angesehen werden. In dieser Näherung ist die Bedingung der ,,Lokalität“ des Äquivalenzprinzips erfüllt.

In 1. Näherung erhalten wir eine Gezeitenbeschleunigung, welche unter den gegebenen Voraussetzungen die beobachtbaren Daten der Gezeiten gut beschreibt. Explizit lautet die Gezeitenbeschleunigung

$$\Delta\vec{a}(\vec{r}\,') = \vec{a}(\vec{r}) - \vec{a}(\vec{r}_S) = \vec{R}\cdot\nabla\vec{a}(\vec{r})\Big|_{\vec{r}_S} = -g\cdot M\vec{R}\nabla\left(\frac{1}{r^2}\vec{r}\right)\Bigg|_{\vec{r}_S}$$

$$= g\cdot M\cdot\vec{R}\left(-\frac{3}{r_S^3}\vec{e}\vec{e} + \frac{I}{r_S^3}\right) = g\cdot M\cdot R\left(\frac{3\cos J\cdot\vec{e} - \vec{e}\,'}{r_S^3}\right).$$

Wegen $g = g\,\dfrac{M_E}{R^2}$ läßt sich γ eliminieren.

$$\Delta\vec{a}(\vec{r}\,') = g \cdot \frac{M}{M_E}\left(\frac{R}{r_S}\right)^3 \left(3\cos J\vec{e} - \vec{e}\,'\right). \qquad \text{(A2)}$$

Methode 2

Wegen der Potentialeigenschaft der Gravitationskraft läßt sich auf einfache Weise ein Gezeitenpotential Δφ(r')gewinnen.

Gleichung (6.1) läßt sich demgemäß schreiben:

$$\nabla\left(\Delta j\,(\vec{r}\,')\right) = \nabla j\,(\vec{r}) - \nabla j\,(\vec{r}_S) \qquad (\nabla = \text{grad}), \qquad \text{(A3)}$$

$$\Delta j\,(\vec{r}\,') = gM\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_S} - \frac{R\cdot\cos J}{r_S^2}\right\}.$$

Das Potential der Schwerpunktbechleunigung am Orte P auf der Erde ergibt sich aus der Überlegung, daß die konstante Beschleunigung $\vec{a}(\vec{r}_S)$ um $R \cdot \cos J$ zu verschieben ist. Durch den konstanten Faktor (M 1/r_S wird das Gezeitenpotential so normiert, daß es im Schwerpunkt 0 der Erde verschwindet.

Wegen $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_S}\left(1 - 2\cdot\frac{R}{r_S}\cos J + \frac{R^2}{r_S^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ und $\frac{R}{r_S} << 1$

läßt sich $\frac{1}{r}$ gemäß $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_S}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r_S}\right)^n Pn(\cos J)$, [26],

wobei P_0 (cosϑ) = P_1 (cosϑ) = cosϑ, P_2 (cosϑ) = ½(3 $\cos^2$ ϑ - 1),...

entwickeln. Zusammen mit (A3) ergibt sich daraus das Gezeitenpotential von (A2)

$$\Delta j\,(r') = g \cdot \frac{M}{M_E}\left(\frac{R}{r_S}\right)^3 \frac{R}{2}\left(3\cos J - 1\right). \qquad \text{(A4)}$$

Durch Integration gewinnt man aus (A4), (A2) zurück.

Literatur:

[1] Philosophisches Lexikon von Johann Georg WALCH, Herausgeber Justus Christian Hennings, Leipzig 1775^4, Spalte 827 im Artikel: Ebbe und Fluth.

[2] M.WAGENSCHEIN, Verstehen lehren, Weinheim: Beltz 1973, s. 24

[3] Es wurden an bundesdeutschen allgemeinbildenden Schulen zugelassene Lehrbücher aller Schulstufen herangezogen. Lediglich in zwei Lehrbüchern der Sekundarstufe II wurde das Problem der Gezeiten behandelt.

[4] Von 20 befragten Lehrerstudenten eines 5. Semesters und 10 Studenten eines 1. Semesters konnte zwar von der Mehrzahl das Phänomen der Gezeiten skizziert werden. Eine halbwegs angemessene Erklärung wurde von keinem einzigen der Befragten geliefert.

[5] M. WAGENSCHEIN: Wissenschafts-Verständigkeit, Neue Sammlung (1975), S. 326

[6] M. WAGENSCHEIN: Wissenschafts-Verständigkeit, a.a.O.

[7] W. JUNG, Fach und Fachdidaktik in der Ausbildung des Physiklehrers. Westermanns Pädagogische Beiträge (1972), S. 38.

[8] J.S. BRUNER: Die Wichtigkeit der Struktur, in: H. Tütken. K. Spreckelsen (Hrsg.): Zielsetzung und Struktur des Curriculum, Frankfurt etc.: Diesterweg, 1971,5.67.

[9] E. MACH: Die Mechanik - historisch-kritisch dargestellt. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft 1976, unveränderter reprografischer Nachdruck der 9. Auflage, Leipzig 1933.S. 206ff.

[10] G. GALILEI: Dialog über die beiden hauptsächlichen Weltsysteme: Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft 1982.

[11] R. POHL: Mechanik, Akustik und Wärmelehre, Berlin: Springer 196917, S. 93.

[12] Meyers Physik-Lexikon, Mannheim etc.: Bibliographisches Institut, 1973, S.3 47.

[13] H. JODL: Felder, Stuttgart: Akademische Verlagsgesellschaft, 1976

[14] Ch. GERTHSEN, H. O. KNESER, H. VOGEL: Physik, Berlin etc.: Springer, 197412. s. 47ff.

[15] Bei jüngeren Schülern sollte nicht versäumt werden, parallel dazu auf anschaulich extrapolative Weise, etwa aber das Gefühl des ,,Leichterwerdens“ beim Schwimmen, auch die affektive Seite des Verständnisses zu fördern Dabei ist allerdings die Vorstellung zu vermeiden, die gewichtsreduzierende Kraft im Zustand der Schwerelosigkeit sei eine Art Auftrieb. Obwohl auch der hydrostatische Druck an das Vorhandensein eines Schwerefeldes geknüpft ist, handelt es sich bei der Schwerelosigkeit um ein völlig anderes Phänomen.

[16] E. MACH: Die Mechanik, a.a.O.

[17] Wir regen an, die numerische Rechnung nachzuvollziehen, um sich ein Gefühl von den Eigenschaften dieser Funktion zu verschaffen.

[18] Vgl. z.B.: Ch. GERTHSEN, H. O. KNESER,G. VOGEL: Physik, a.a.O., 547ff.

[19] Die Herleitung von GI. (9) aus Gl. (3) ist ein nützliches Übungsbeispiel für die lineare Approximation einer Vektorfunktion. Im Anhang A werden zwei verschiedene Approximationsmethoden skizziert.

[20] M. BORN: Die Relativitätstheorie Einsteins, Berlin etc.: Springer, ig6g~, S. 271ff.

[21] Siehe etwa: Meyers Physik-Lexikon, a.a.O., 5.347.

[22] R.H. DICKE: The Eötvös Experiment, Sci. Am. **205**/12,84 (1961).

[23] Man kann leicht zeigen, daß dies bei nicht-kugelsymmetrischer Verteilung der Massen Am in der Tat auch nicht gilt.

[24] NEWTON: Mathematische Prinzipien der Naturlehre, Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft, 1963.

[25] Encyclopedia Britanica Vo. 22. London etc., l929~1941, p. 194.

[26] I.N. BRONSTEIN, K. A. SEMENDJAJEV: Taschenbuch der Mathematik, Zürich: Deutsch, 1973[13].